Chapitre 2 : Cinématique du point – Rappels.

Sommaire

I. Dérivation vectorielle – Rappels 11

1) Dérivée d'un vecteur - Définition 11

2) Interprétation géométrique 11

3) Propriétés 11

4) Dérivée d'un vecteur exprimé dans la base de dérivation 12

II. Changement de la base de dérivation 12

1) Cas particulier : $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z1}$ 12

2) Généralisation – Formule de la base mobile 13

III. Propriété du vecteur rotation Ω 14

1) Composition du vecteur rotation 14

IV. Vecteur vitesse d'un point par rapport à un repère 15

1) Définition 15

2) Interpretation géometrique 15

V. Vecteur accéleration d'un point par rapport à un repère 15

1) Définition 15

I. Dérivation vectorielle – Rappels

1) Dérivée d'un vecteur - Définition

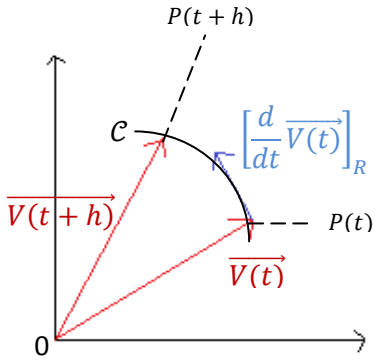
La dérivée du vecteur $\overrightarrow{V(t)}$ par rapport à t dans le repère R est le vecteur :

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V(t)}\right]_R = \lim_{h\to 0}\frac{\overrightarrow{V(t+h)} - \overrightarrow{V(t)}}{h}$$

Remarques :

- t est associé au temps.
- La dérivée de $\vec{V}$ dépend du repère de dérivation. C'est-à-dire $\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V(t)}\right]_R \neq \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V(t)}\right]_{R'}$

2) Interprétation géométrique



$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V(t)}\right]_R$ est un vecteur tangent à la courbe $\mathcal{C}$ au point $P(t)$.

3) Propriétés

- $\left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}\right)\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_1}\right]_R + \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_2}\right]_R$
- $\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\lambda V}\right]_R = \dot{\lambda}.\vec{V} + \lambda\left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_R$ avec $\dot{\lambda} = \frac{d}{dt}\lambda$
- $\left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2}\right)\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_1}\right]_R.\overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_1}.\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_2}\right]_R$
- $\left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{V_1}\wedge\overrightarrow{V_2}\right)\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_1}\right]_R \wedge \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_1}\wedge\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_2}\right]_R$
- $\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V\left(\theta(t)\right)}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_R \times \dot{\theta}$

4) Dérivée d'un vecteur exprimé dans la base de dérivation

Soit un vecteur exprimé de la manière suivante :

$$\vec{V} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$$

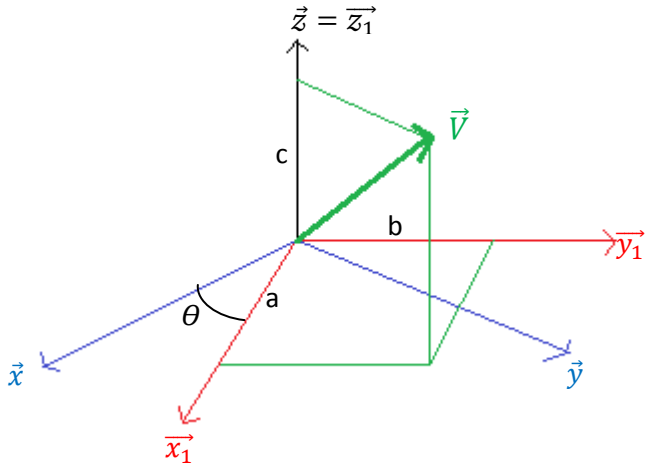
Compte tenu des propriétés énoncées plus haut :

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_R = \dot{a}\vec{x} + \dot{b}\vec{y} + \dot{c}\vec{z}$$

II. Changement de la base de dérivation

Soit $R = (0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et $R_1 = (0, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ deux repères orthonormés directs. Considérons un vecteur $\vec{V}$ exprimé dans la base du repère R_1: $\vec{V} = a\overrightarrow{x_1} + b\overrightarrow{y_1} + c\overrightarrow{z_1}$, ($a, b$ et c fonction du temps) et cherchons la dérivée du vecteur $\vec{V}$ par rapport à t dans R.

Avant de déduire pour le cas général, nous allons chercher pour le cas particulier où $\vec{z} = \overrightarrow{z_1}$.



1) Cas particulier : $\vec{z} = \overrightarrow{z_1}$

Un seul paramètre angulaire suffit pour orienter R par rapport à R_1.
$\theta = (\vec{x}, \overrightarrow{x_1})$ et $\theta = f(t)$

Donc $\left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}(a\overrightarrow{x_1} + b\overrightarrow{y_1} + c\overrightarrow{z_1})\right]_R = \left[\frac{d}{dt}a\overrightarrow{x_1}\right]_R + \left[\frac{d}{dt}b\overrightarrow{y_1}\right]_R + \left[\frac{d}{dt}c\overrightarrow{z_1}\right]_R$

$\left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_R = \dot{a}\overrightarrow{x_1} + a\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{x_1}\right]_R + \dot{b}\overrightarrow{y_1} + b\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{y_1}\right]_R + \dot{c}\overrightarrow{z_1} + c\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{z_1}\right]_R$

Or $\dot{a}\vec{x} + \dot{b}\vec{y} + \dot{c}\vec{z} = \left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_{R_1}$. De plus $\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{z_1}\right]_R = \vec{0}$.

D'où $\left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_{R_1} + a\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{x_1}\right]_R + b\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{y_1}\right]_R$.

Pour calculer $\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{x_1}\right]_R$ on considère que le vecteur unitaire $\overrightarrow{x_1}$ est fonction du temps par l'intermédiaire de θ.

On pose $\overrightarrow{x_1}[\theta(t)]$ donc $\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{x_1}\right]_R = \left[\frac{d}{d\theta}\overrightarrow{x_1}\right]_R \times \dot{\theta}$ (avec $\dot{\theta} = \frac{d}{dt}\theta$).

Si on exprime le vecteur unitaire $\overrightarrow{x_1}$ dans le repère R, on a :
$\left[\frac{d}{d\theta}\overrightarrow{x_1}\right]_R = \left[\frac{d}{d\theta}(\cos\theta\vec{x} + \sin\theta\vec{y})\right]_R = -\sin\theta\vec{x} + \cos\theta\vec{y}$, soit $\left[\frac{d}{d\theta}\overrightarrow{x_1}\right]_R = \overrightarrow{y_1}$ (dérivée d'un vecteur unitaire ⇒ rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ suivant θ).

De la même façon, $\left[\frac{d}{d\theta}\overrightarrow{y_1}\right]_R = -\overrightarrow{x_1}$.

D'où $\left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_{R_1} + a\dot{\theta}\overrightarrow{y_1} - b\dot{\theta}\overrightarrow{x_1}$

ou encore $\left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_{R_1} + \dot{\theta}\vec{z} \wedge (a\overrightarrow{x_1} + b\overrightarrow{y_1} + c\overrightarrow{z_1})$.

On pose : $\overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} = \dot{\theta}\vec{z}$.

✧ **Définition**

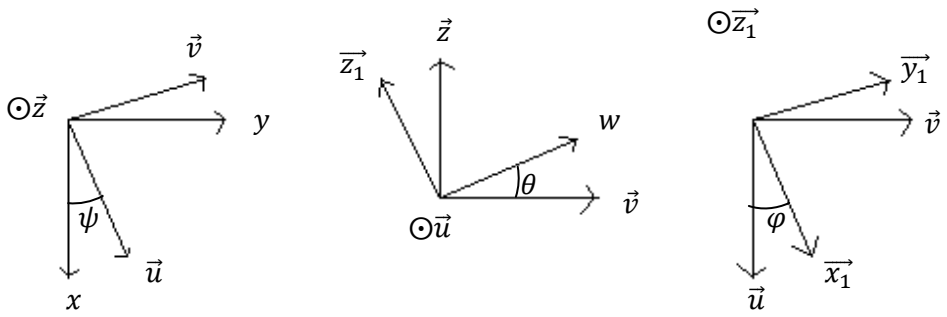
Le vecteur $\overrightarrow{\Omega_{R_1/R}}$ est appelé vecteur vitesse de rotation de R_1 par rapport à R. D'où :

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \overrightarrow{V_{R_1}}$$

2) Généralisation – Formule de la base mobile

Si R_1 est défini par rapport à R suivant trois angles $\alpha_i (i = 1,2,3)$ mesurés respectivement autour des 3 vecteurs unitaires $\overrightarrow{e_i} (i = 1,2,3)$:

Exemple des trois angles d'Euler
$\alpha_1 = \psi$, $\alpha_2 = \theta$, $\alpha_3 = \varphi$
$\overrightarrow{e_1} = \vec{z}$, $\overrightarrow{e_2} = \vec{u}$, $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{z_1}$



En considérant $\overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} = \sum_{i=1}^{3}(\alpha_i \vec{e_i})$ avec $\overrightarrow{\Omega_{R_1/R}}$ vecteur vitesse rotationnel de ${}^{R_1}/_{R}$, on démontre que $\left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \vec{V}$.

⇢ Cette formule est dite « de la base mobile », et elle permet – si le vecteur à dériver est constant dans R_1 – de remplacer une dérivation vectorielle en simple produit vectoriel.

III. Propriété du vecteur rotation Ω

1) Composition du vecteur rotation

Si on considère le vecteur $\vec{V}$:

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_{R_1} = \left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}} \wedge \vec{V}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_{R_{n-1}} = \left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_{R_n} + \overrightarrow{\Omega_{R_n/R_{n-1}}} \wedge \vec{V}$$

En ajoutant, on a

(1) $\left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_{R_1} = \left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_{R_n} + \left[\overrightarrow{\Omega_{R_n/R_{n-1}}} + \cdots + \overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}}\right] \wedge \vec{V}$

On peut aussi écrire de R_1 à R_n directement :

(2) $\left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_{R_1} = \left[\frac{d}{dt}\vec{V}\right]_{R_n} + \overrightarrow{\Omega_{R_n/R_1}} \wedge \vec{V}$

de (1) et (2) on déduit :

$$\overrightarrow{\Omega_{R_n/R_1}} = \sum_{i=2}^{n} \overrightarrow{\Omega_{R_i/R_{i-1}}}$$

Formule de composition des vitesses angulaires

Inversion de bases de dérivation

On démontre également que :

$$\overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}} = \overrightarrow{-\Omega_{R_1/R_2}}$$

IV. Vecteur vitesse d'un point par rapport à un repère

1) Définition

Le vecteur vitesse d'un point P par rapport à R à la date t est la dérivé du vecteur position $\overrightarrow{OP(t)}$ par rapport à t dans R.

$$\overrightarrow{V_{P/R}} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP(t)}\right]_R$$

2) Interprétation géométrique

Comme on l'a vu pour l'interprétation géométrique d'un vecteur, le vecteur vitesse de P par rapport à R, à la date t, est un vecteur tengent au point $P(t)$ à la trajectoire $\mathcal{T}$ du point P dans R

V. Vecteur accélération d'un point par rapport à un repère

✧ Définition

Le vecteur accélération d'un point P par rapport à R, à la date t, est la dérivé du vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{P/R}}$ par rapport à t dans R.

$$\overrightarrow{\Gamma_{P/R}} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_{P/R}}\right]_R$$